Nociones básicas de teoría de grupos

G es **cíclico infinito** si existe $x \in G$ tal que $G = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Se denota $G =< x >$ y se dice que x es un generador de G.
G es cíclico infinito si y solo si es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.

El **grupo libre** con dos generadores x, y es el conjunto de palabras finitas (de cualquier longitud) del tipo $a_1 a_2 \dots a_n$ donde $a_i \in \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ (por ejemplo, $xxxxyxy^{-1}y^{-1}x, xx^{-1}xxyxyy^{-1}x, \dots$) donde se pueden operar aquellos grupos de x, x^{-1} (o de y, y^{-1}) adyacentes (por ejemplo, $xxxxyxy^{-1}y^{-1}x = x^4yxy^{-2}x, xx^{-1}xxyxyy^{-1}x = x^2yxy^0x = x^2yxx = x^2yx^2, \dots$) obteniéndose palabras reducidas. La palabra reducida vacía o de longitud 0 representa el elemento neutro de G.
El grupo libre con dos generadores x, y se denota $G = \langle x, y \rangle$.
Obsérvese que $G = \langle x, y \rangle$ no es conmutativo (abeliano) porque $xy \neq yx$.

Análogamente se define el grupo libre $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

El **grupo libre abeliano** con dos generadores es $G = \langle x, y : xy = yx \rangle$. En este caso, las palabras reducidas serían del tipo

$$xxxxyxy^{-1}y^{-1}x = x^4yxy^{-2}x = x^6y^{-1}, xx^{-1}xxyxyy^{-1}x = x^2yx^2 = x^4y, \dots$$

Se tiene $G = \langle x, y : xy = yx \rangle \simeq (\mathbb{Z}^2, +)$.

Nociones básicas de teoría de grupos

En general, si G es un grupo, una **presentación** de G consiste en una familia $\{a_i\}$ de **generadores** para G junto con un conjunto completo $\{r_j\}$ de **relaciones** para G, donde cada r_j es un elemento del grupo libre sobre el conjunto $\{a_i\}$.
Si la familia $\{a_i\}$ es finita, entonces G está **finitamente generado**.
Si ambas familias $\{a_i\}$ y $\{r_j\}$ son finitas, entonces G se dice que está **finitamente presentado**.

Si G, H son dos grupos, el **producto libre** $G * H$ de G y H es el conjunto de palabras finitas (de cualquier longitud) del tipo $g_1 h_1 g_2 h_2 \ldots g_n h_n$ donde $g_i \in G, H_i \in H$.
Las palabras reducidas se obtienen reduciendo cada uno de los elementos g_i y h_i, eliminando aquellos en que $g_i = 1$ o $h_i = 1$, operando y reduciendo la palabra resultante,...

Teorema de Seifert-Van kampen

Teorema de Seifert-Van kampen. Sea $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos tales que U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos.
a) Si $\pi(U) \simeq \pi(V) \simeq \{0\} \Rightarrow \pi(X) \simeq \{0\}$.
b) Si $\pi(U \cap V) \simeq \{0\} \Rightarrow \pi(X) \simeq \pi(U) * \pi(V)$.
c) Si $\pi(U) \simeq \{0\}$, $\pi(X)$ es isomorfo a $\pi(V)$ con el conjunto de relaciones $\{i_*(\alpha) = 1 : \alpha \in \pi(U \cap V)\}$, donde $i : U \cap V \hookrightarrow V$.
d) En general, $\pi(X)$ tiene como generadores la unión de los de $\pi(U)$ y $\pi(V)$, y como relaciones la unión de las de $\pi(U)$, las de $\pi(V)$ y todas las de la forma $\{i_*(\alpha) = j_*(\alpha) : \alpha \in \pi(U \cap V)\}$, donde $i : U \cap V \hookrightarrow U$, $j : U \cap V \hookrightarrow V$ son las inclusiones.

Demostración (Fase común a todos los casos). Los tres primeros casos son casos particulares del último caso.
Vamos a ver que, en todos los casos, los generadores de $\pi(X)$ son la unión de los de $\pi(U)$ y $\pi(V)$.
Sea $p \in U \cap V$ y sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow S^2$ un lazo basado en p.
Entonces existen $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ tal que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ ó V y podemos suponer, fusionando intervalos adyacentes con imagen en el mismo U ó V, que $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ va alternando entre U y V y por tanto $\alpha(t_i) \in U \cap V$, para todo i.

Teorema de Seifert-Van kampen

Demostración (Fase común a todos los casos) (Cont.). Para todo $t \in [0,1]$ existe $U^x = (x-\varepsilon, x-\varepsilon)$ tal que $f(U^x) \subset U$ ó V.
Entonces $\{U^x \cap [0,1] \mid x \in [0,1]\}$ es un recubrimiento abierto de $[0,1]$ compacto.
Luego existen $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tal que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^n U^{x_i}$ donde podemos suponer que si eliminamos uno de ellos deja de ser recubrimiento (esto implica que $0 \in U_{x_1}$).
Sea $t_1 \in U^{x_1} \cap U^{x_2}$, $x_1 < t_1 < x_2$, entonces $[0,t_1] \in U^{x_1}$ y por tanto $\alpha([0,t_1]) \subset U$ ó V.
Sea $t_2 \in U^{x_2} \cap U^{x_3}$, $x_2 < t_2 < t_3$, entonces $[t_1,t_2] \in U_{x_1}$ y por tanto $\alpha([t_1,t_2]) \subset U$ ó V.
Continuando este proceso existe $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ tal que $\alpha([t_{i-1},t_i]) \subset U$ ó V.
Para todo $i \geq 1$ sea $\alpha_i : [0,1] \longrightarrow S^2$ tal que $\alpha_i(s) = \alpha((1-s)t_{i-1} + st_i)$.
Para todo $i \neq 0, n$, sea $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow U \cap V$ un camino de p a $\alpha(t_i)$.
Entonces
$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 * \cdots * \alpha_n = \alpha_1 * (\bar{\gamma}_1 * \gamma_1) * \alpha_2 * (\bar{\gamma}_2 * \gamma_2) * \ldots (\bar{\gamma}_{n-1} * \gamma_{n-1}) * \alpha_n \\ &= (\alpha_1 * \bar{\gamma}_1) * (\gamma_1 * \alpha_2 * \bar{\gamma}_2) * \cdots * (\gamma_{n-1} * \alpha_n) = \beta_1 * \beta_2 * \cdots * \beta_n \,(\text{rel.}\{0,1\}),\end{aligned}$$
donde β_i es un lazo contenido en U ó V.
Por tanto, $\pi(X)$ tiene como generadores la unión de los generadores de $\pi(U)$ y $\pi(V)$.
Como relaciones tendrá al menos las de $\pi(U)$ y $\pi(V)$, pero puede haber nuevas relaciones entre los generadores de $\pi(U)$ y $\pi(V)$. Lo veremos caso por caso. Los detalles se pueden ver en el libro de Hatcher.

Teorema de Seifert-Van kampen. Caso (a)

Caso (a) Si $\pi(U) \simeq \pi(V) \simeq \{0\} \Rightarrow \pi(X) \simeq \{0\}$.

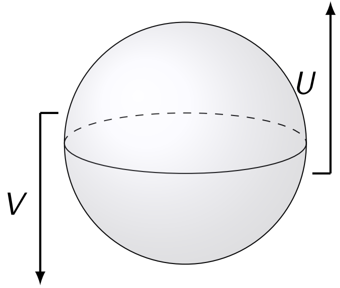
Demostración. En este caso como $\pi(U) \simeq \pi(V) \simeq \{0\}$ es inmediato que $\pi(X) \simeq \{0\}$.

Ejemplo. $\pi(S^n) \simeq \{0\}$.

Basta tomar

- $U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > -\frac{1}{4}\} \sim S^2 \setminus \{S\}$,

- $V = \{(x, y, z) \in \S^2 \mid z < \frac{1}{4}\} \sim S^2 \setminus \{N\}$



tales que U, V y $U \cap V$ son conexo por caminos, con

- $\pi(U) \simeq \pi(V) \simeq \{0\}$.

Entonces $\pi(S^2) \simeq \{0\}$.

El mismo razonamiento permite demostrar que $\pi(S^n) \simeq \{0\}$, para $n \geq 2$.

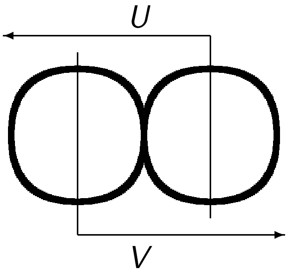
Ejercicio. Calcula $\pi(S^2 \vee S^2)$.

Solución. Calcula $\pi(\vee S^2) \simeq \{0\}$.

Teorema de Seifert-Van kampen. Caso (b)

Caso (b) Si $\pi(U \cap V) \simeq \{0\} \Rightarrow \pi(X) \simeq \pi(U) * \pi(V)$.

Observación. En este caso se probaría que $\pi(U \cap (V) \simeq \{0\}$ implica que no puede haber nuevas relaciones entre los generadores de $\pi(U)$ y $\pi(V)$. Por tanto, $\pi(X)$ tiene como generadores la unión de los de $\pi(U)$ y $\pi(V)$, y como relaciones las de $\pi(U)$ y $\pi(V)$. Luego $\pi(X) \simeq \pi(U) * \pi(V)$.



Ejemplo. $\pi(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Consideramos U y V como en la figura de la derecha tales que:

- $\pi(U) \simeq \pi(V) \simeq \mathbb{Z}$,
- $\pi(U \cap V) \simeq \{0\}$.

Entonces $\pi(X) \simeq \pi(U) * \pi(V) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, donde:

- $\pi(U) = \langle a \rangle$, donde a es el lazo que da una vuelta alrededor de la circunferencia de la izquierda en sentido positivo
- $\pi(V) = \langle b \rangle$, donde b es el lazo que da una vuelta alrededor de la circunferencia de la derecha en sentido positivo

Así $\pi(X) \simeq \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \langle a, b \rangle$ donde $a^{i_1} b^{j_1} \ldots a^{i_k} b^{j_k}$ es el camino que da i_1 vueltas alrededor de $A, \ldots, j_k$ vueltas alrededor de B, donde si un exponente es positivo (resp. negativo) las vueltas son en sentido positivo (resp. negativo) y si es 0 el término se anula.

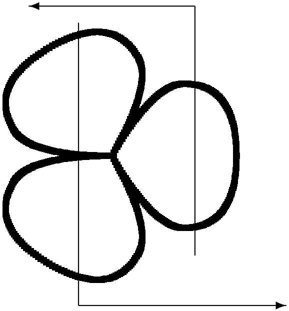
Teorema de Seifert-Van kampen. Caso (b)

Ejemplo. $\pi(S^1 \vee S^1 \vee \overset{n}{\dots} \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \overset{n}{\dots} * \mathbb{Z}$

Si $X = S^1 \vee S^1 \vee S^1$ (espacio obtenido pegando 3 circunferencias por un punto)

Consideramos U y V como en la figura de la derecha tales que:

- $\pi(U) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$,
- $\pi(V) \simeq \mathbb{Z}$,
- $\pi(U \cap V) \simeq \{0\}$.



Así $\pi(X) \simeq \pi(U) * \pi(V) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle a, b, c \rangle$ donde $a^{i_1} b^{j_1} c^{l_1} \dots a^{i_k} b^{j_k} c^{l_k}$ representa el camino que da i_1 vueltas alrededor de A, j_1 vueltas alrededor de B, l_1 vueltas alrededor de C, $\dots$, i_k vueltas alrededor de A, j_k vueltas alrededor de B y l_k vueltas alrededor de C, donde si un exponente es positivo (resp. negativo) las vueltas son en sentido positivo (resp. negativo) y si es 0 el término se anula).

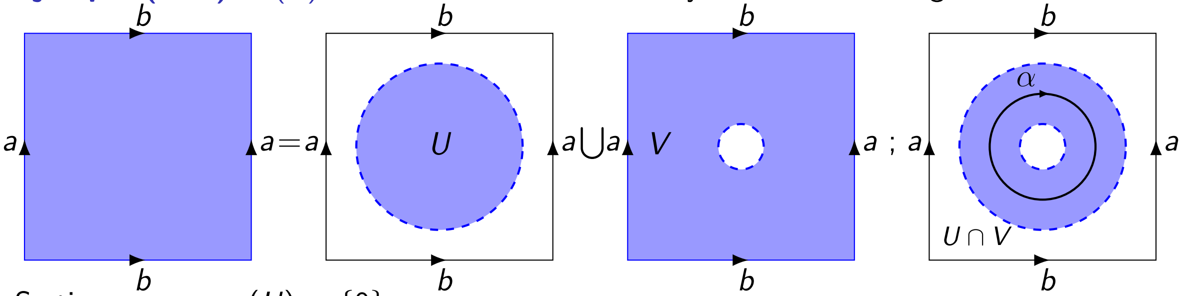
En general, si $X = S^1 \vee S^1 \vee \overset{n}{\dots} \vee S^1$, $\pi(X) = \langle a_1, a_2, \overset{n}{\dots}\, a_n \rangle$.

Ejercicio. Calcula $\pi(S^2 \vee S^1)$.

Teorema de Van Kampen. Caso (c)

Caso (c) Si $\pi(U) \simeq \{0\}$, $\pi(X)$ es isomorfo a $\pi(V)$ añadiendo el conjunto de relaciones $\{i_*(\alpha) = 0 : \alpha \in \pi(U \cap V)\}$, donde $i : U \cap V \hookrightarrow V$.

Ejemplo (toro): $\pi(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Consideramos U y V como en las figuras:



Se tiene que: - $\pi(U) \simeq \{0\}$.

- $\pi(V) = \langle a, b \rangle$ pues V tiene como retracto de deformación fuerte la frontera del cuadrado (2 circunferencias con un punto en común).
- $\pi(U \cap V) = \langle \alpha \rangle$ pues $U \cap V$ es un anillo.

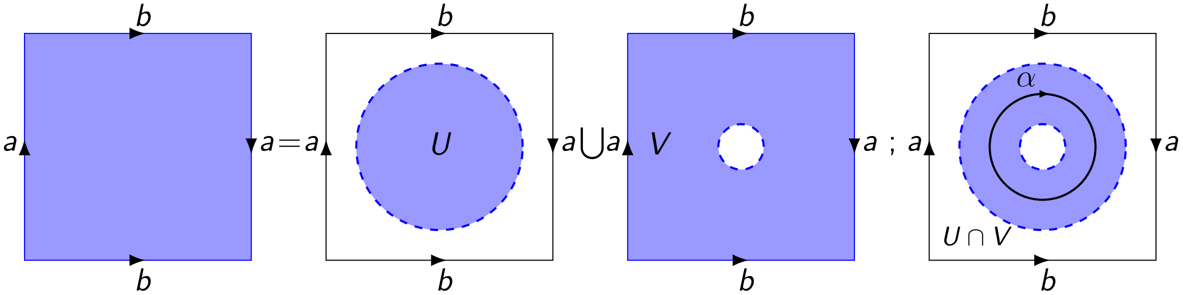
Entonces $\pi(\mathbb{T}) \simeq \langle a, b : i_*(\alpha) = 1 \rangle$, donde $i : U \cap V \hookrightarrow V$, e $i_*(\alpha) = aba^{-1}b^{-1}$.

Así, $\pi(\mathbb{T}) \simeq \langle a, b : aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle = \langle a, b : ab = ba \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Teorema de Van Kampen. Caso (c)

Ejemplo (botella de Klein):

Análogamente al caso del toro, consideramos U y V como en las figuras:



Se tiene que $\pi(U) \simeq \{0\}$, $\pi(V) = \langle a, b\rangle$, $\pi(U \cap V) = \langle \alpha \rangle$.

Entonces $\pi(\mathbb{K}) \simeq \langle a, b : i_*(\alpha) = 1\rangle$, donde $i : U \cap V \hookrightarrow V$, e $i_*(\alpha) = abab^{-1}$.

Así, $\pi(\mathbb{K}) = \langle a, b : abab^{-1} = 1\rangle = \langle a, b : aba = b\rangle$.

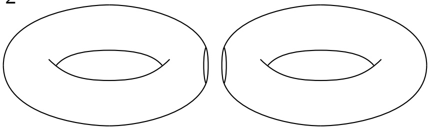
Ejercicio. Calcula $\pi(\mathbb{P})$ para $\mathbb{P}$ el plano proyectivo.

Teorema de Van Kampen. Caso (d)

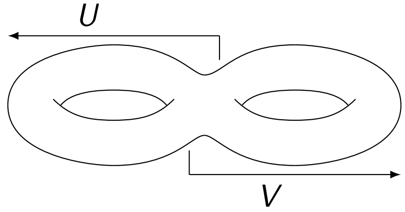
Caso (d) En general, $\pi(X)$ tiene como generadores la unión de los de $\pi(U)$ y $\pi(V)$, y como relaciones las de $\pi(U)$ y $\pi(V)$ junto con todas las de la forma $\{i_*(\alpha) = j_*(\alpha) : \alpha \in \pi(U \cap V)\}$, donde $i : U \cap V \hookrightarrow U$, $j : U \cap V \hookrightarrow V$ son las inclusiones.

Ejemplo (suma conexa de dos toros). Dadas dos superficies M_1 y M_2, su **suma conexa** es una nueva superficie que se obtiene quitando un disco abierto en cada una de ellas y pegando los espacios resultantes a lo largo de las fronteras de los discos eliminados. Se denota $M_1 \# M_2$.

Así, la suma conexa de dos toros es



$\Rightarrow$



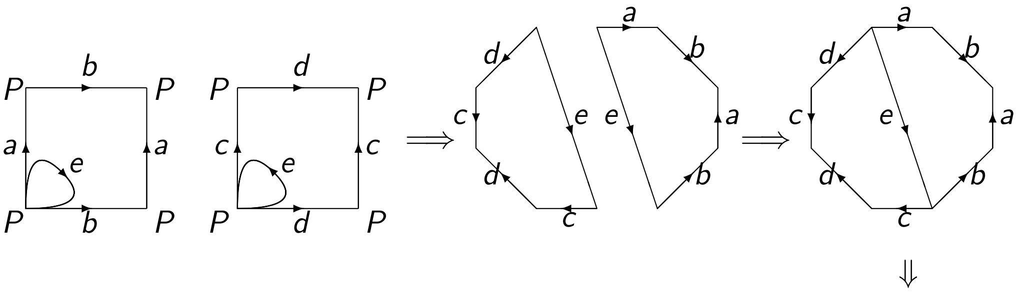
Sean U y V los abiertos de la figura. Entonces:

- $U \sim S^1 \vee S^1$ (unión de dos circunferencias por un punto) $\Rightarrow \pi(U) \simeq \langle a, b \rangle$,
- $V \sim S^1 \vee S^1$ (unión de dos circunferencias por un punto) $\Rightarrow \pi(V) \simeq \langle c, d \rangle$,
- $U \cap V \sim S^1 \Rightarrow \pi(U \cap V) \simeq \langle \alpha \rangle$.

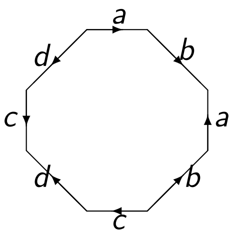
Si $i : U \cap V \longrightarrow U$, $j : U \cap V \longrightarrow V$, se tiene que $i_*(\alpha) = aba^{-1}b^{-1}$, $j_*(\alpha) = cdc^{-1}d^{-1}$.
Entonces $\pi(X) = \{a, b, c, d : aba^{-1}b^{-1} = cdc^{-1}d^{-1}\rangle$.

Suma conexa de n toros

Hagamos la suma conexa $2\,\mathbb{T}$ de dos toros a partir de sus representaciones planas:

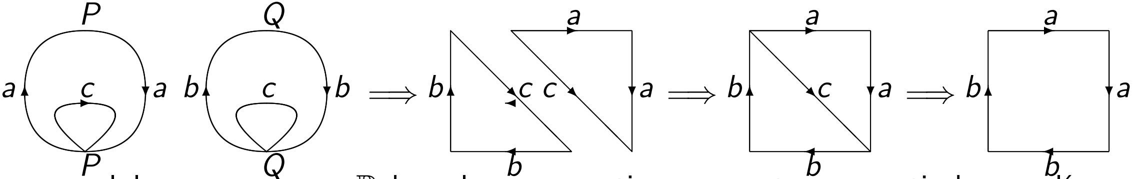


En general, la suma conexa $n\,\mathbb{T}$ de n toros (toro con n agujeros) se construye a partir de un polígono de $4n$ lados identificando sus lados según la regla $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$. Los $4n$ vértices del polígono se identificarán a un mismo punto.



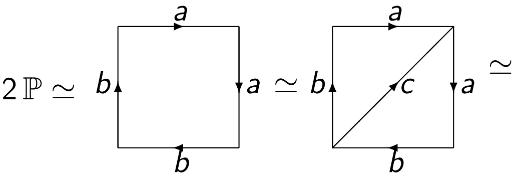
Suma conexa de n planos proyectivos

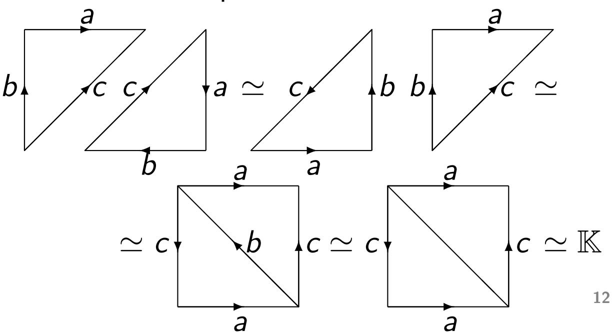
Hagamos la suma conexa $2\,\mathbb{P}$ de dos planos proyectivos a partir de sus representaciones planas:



En general, la suma conexa $n\,\mathbb{P}$ de n planos proyectivos se construye a partir de un polígono de $2n$ lados identificando sus lados según la regla $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$.
Los $2n$ vértices del polígono se identificarán a un mismo punto.

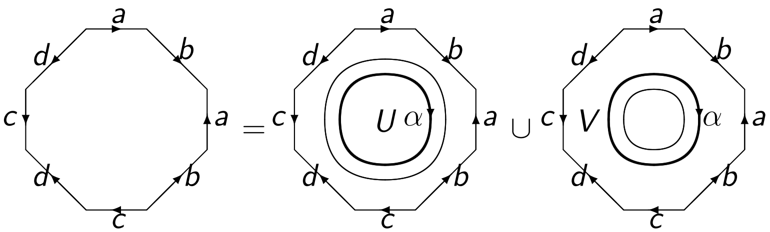
Ejercicio. Demuestra que $2\,\mathbb{P} \simeq \mathbb{K}$.





Grupo fundamental de la suma conexa de n toros

La representación plana de la suma conexa de dos toros es:



donde:

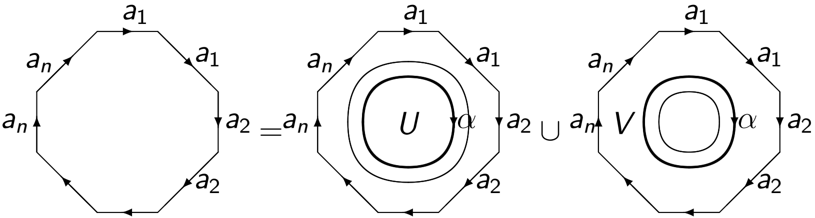
- $\pi(U) \simeq \{0\}$,
- V tiene como retracto de deformación fuerte la frontera del octógono (4 circunferencias con un punto en común), luego $\pi(V) = \langle a, b, c, d \rangle$,
- $U \cap V$ es un anillo. luego $\pi(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}$ y está generado por el lazo α.
- Si $i : U \cap V \hookrightarrow V$, $i_*([\alpha]) = [aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}]$.

Por T. Van Kampen (caso (c)), $\pi(2\,\mathbb{T}, x_0) \simeq \langle a, b, c, d : aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1 \rangle$.

En general, $\pi(n\,\mathbb{T}, x_0) \simeq \langle a_1, b_1, \ldots a_n, b_n : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1 \rangle$

Grupo fundamental de la suma conexa de n planos proyectivos

La representación plana de la suma conexa de n planos proyectivos es:



donde:

- $\pi(U) \simeq 0\}$,
- V tiene como retracto de deformación fuerte la frontera del polígono (n circunferencias con un punto en común), luego $\pi(V) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$,
- $U \cap V$ es un anillo. luego $\pi(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}$ y está generado por el lazo α.
- Si $i : U \cap V \hookrightarrow V$, $i_*([\alpha]) = [a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n]$.

Por T. Van Kampen (caso (c)), $\pi(n\,\mathbb{P}) \simeq \langle a_1, \ldots a_n : a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n = 1 \rangle$

Ejercicios

Ejercicio 1. Demuestra las siguientes propiedades
i) $\mathbb{R}^n - \{p\}$ es simplemente conexo, si $n > 2$
ii) $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos, si $n > 2$
iii) S^n y S^2 no son homeomorfos, si $n > 2$

Solución: **i)** Es claro que $\mathbb{R}^n - \{p\}$ es conexo por caminos
Por otra parte, $\mathbb{R}^n - \{p\} \sim S^n$ pues $r(x) = \frac{x}{||x||}$ es una retracción de deformación fuerte de $\mathbb{R}^n - \{p\} \sim S^n$, ya que $r(x) = \frac{x}{||x||} = x$ si $x \in S^n$, y $H(x,t) = (1-t)r(x) + tx$ es una homotopía entre $i \circ r$ y la identidad en $\mathbb{R}^n - \{p\}$.
Por tanto, $\pi(\mathbb{R}^n - \{p\}) \simeq \pi(S^n) = \{0\}$.
ii) Supongamos que $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^2$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $y = f(x) \in \mathbb{R}^2$.
Entonces $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.
Pero $\pi(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) = \{0\}$ (por (a)) y $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}) \simeq \pi(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ (contradicción).
iii) Supongamos que $S^n \simeq S^2$. Sea $x \in S^n$, $y = f(x) \in S^2$.
Entonces $S^n \setminus \{x\} \simeq S^2 \setminus \{y\}$.
Pero $S^n \setminus \{x\} \simeq \mathbb{R}^n$ y $S^2 \setminus \{y\} \simeq \mathbb{R}^2$ (contradicción con (ii)).

Ejercicios

Ejercicio 2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Decide si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, demostrándolas o dando un contraejemplo:
i) si $f : X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva, entonces $f_* : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, f(x_0))$ es sobreyectiva
ii) si $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva, entonces $f_* : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, f(x_0))$ es inyectiva
ii) si $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva, entonces $f_* : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, f(x_0))$ es biyectiva

Solución: **i)** Falso. Sea $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ dada por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ que es suprayectiva. Sin embargo, como $\pi([0,1]) = \{0\}$ y $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$, $i_* : \pi([0,1]) \longrightarrow \pi(S^1)$ no puede ser suprayectiva
ii) Falso. Sea $i : S^1 \longrightarrow D_2$ la inclusión de la frontera del disco en el disco que es inyectiva. Sin embargo, como $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi(D^2) = \{0\}$, $i_* : \pi(S^1) \longrightarrow \pi(D^2)$ no puede ser inyectiva
iii) Falso. Sea $f : [0,1) \longrightarrow S^1$ dada por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ que es biyectiva. Sin embargo, como $\pi([0,1)) = \{0\}$ y $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$, $i_* : \pi([0,1)) \longrightarrow \pi(S^1)$ no puede ser biyectiva

Ejercicios

Ejercicio 3. Calcula los grupos fundamentales de:
i) $\mathbb{R}$ con la topología trivial
ii) $S^2 \vee S^2$ (unión por un punto de dos esferas)
iii) $S^1 \vee S^2$ (unión por un punto de una circunferencia y una esfera)
iv) $\mathbb{T} \vee \mathbb{T}$ (unión por un punto de dos toros)
v) $\mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$
vi) $S^2 - \{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0)\}$

Solución: **i)** $\pi(\mathbb{R}_t, x_0) = \{0\}$ pues si $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_t$ son dos lazos en x_0, se tiene $\alpha \overset{H}{\sim} \beta$ (rel.$\{0,1\}$) con $H(s,t) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(s) & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$ (cualquier función en $\mathbb{R}_t$ es continua).
ii) $\pi(S^2 \vee S^2) \simeq \{0\}$ (por T. Van Kampen (a))
iii) $\pi(S^1 \vee S^2) \simeq \pi(S^1) * \pi(S^2) \simeq \mathbb{Z} * \{0\} \simeq \mathbb{Z}$ (por T. Van Kampen (b))
iv) $\pi(\mathbb{T} \vee \mathbb{T}) \simeq \pi(\mathbb{T}) * \pi(\mathbb{T}) \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ (por T. Van Kampen (b))
v) $\pi(\mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
(pues $\mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\} \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$)
vi) $\pi(S^2 - \{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0)\} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
(pues $S^2 - \{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0)\} \simeq \mathbb{R}^2 - \{a,b,c\} \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1$)

Ejercicios

Ejercicio 4. Encuentra espacios cuyos grupos fundamentales sean isomorfos a Z^n, a Z_n, a $Z^n * Z^m$ y a $Z_n * Z_m$.

<u>Solución</u>: - Si $X_n = S^1 \times S^1 \times \overset{n}{\ldots} S^1$, $\pi(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \overset{n}{\ldots} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^n$.
- Si Y_n es el cociente de un polígono de n lados identificando todos sus lados, entonces $\pi(X) \simeq \langle a : a^n = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$.
- Si $X = X_m \vee X_n$, $\pi(X) \simeq \mathbb{Z}^m * \mathbb{Z}^n$.
- Si $Y = Y_m \vee Y_n$, $\pi(Y) \simeq \mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n$.

Ejercicios

Ejercicio 5. Sea $X = S^2 \cup \{(x,0,0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$.
i) Calcula el grupo fundamental de X y dibuja los generadores de este grupo.
ii) ¿Es homeomorfo a la circunferencia S^1 o a la esfera S^2?

<u>Solución</u>: **i)** Sean $U = \{(x,y,x) \in X \mid z > -\frac{1}{2}\}$, $V = \{(x,y,x) \in X \mid z < \frac{1}{2}\}$:
- $U' = \{(x,0,z) \in X \mid z \geq 0\}$ es retracto de deformación de $U \Rightarrow \pi(U) \simeq \pi(U') \simeq \mathbb{Z} \simeq \langle a \rangle$,
- $V' = \{(x,0,z) \in X \mid z \leq 0\}$ es un retracto de deformación de V y por tanto $\pi(V) \simeq \pi(V') \simeq \mathbb{Z} \simeq \langle b \rangle$,
- $W' = \{(x,y,z) \in X \mid z = 0\}$ es un retracto de deformación de $U \cap V$ y por tanto $\pi(U \cap V) \simeq \pi(W) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle c, d \rangle$,
- Si $i : U \cap V \longrightarrow U$ es la inclusión de $U \cap V$ en U, $i_*([c]) = i_*([d]) = [a]$,
- Si $j : U \cap V \longrightarrow V$ es la inclusión de $U \cap V$ en U, $j_*([c]) = i_*([d]) = [b]$.

Por tanto, $\pi(X) = \langle a, b : a = b \rangle \simeq \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$.
ii) X no es homeomorfo a S^1 pues si $h : X \longrightarrow S^1$ fuera un homeomorfismo, $X \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ es conexo pero $S^1 \setminus \{f(0,0,1), f(0,0,-1)\}$ no lo sería.
X no es homeomorfo a la esfera S^2 pues $\pi(X) \not\simeq \pi(S^2)$.

Ejercicios

Ejercicio 6. Calcula el grupo fundamental, dibuja los generadores de esos grupos y demuestra si son homeomorfos, o tienen el mismo tipo de homotopía, los siguientes conjuntos A, B, C formados por uniones de circunferencias y segmentos